
Concours D'ADMISSION EN PREMIERE ANNEE

C.U.E.S – D.E.U.G.

Epreuve de Mathématiques

Lundi 22 Juillet 2013

Durée 3 heures

Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1) Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

3) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \leq \int_0^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

4) En déduire que :

$$b) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$$

5) a) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$

(On admettra que $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n n!} \Gamma(n+1/2)$)

6) Montrer que :

$$a) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

b) Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

7) Montrer que :

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

8) En utilisant les questions précédentes, calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

Exercice 1 : Soient $h, u,$ et v trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ ne laissant simultanément stables que les sous-espaces $\{0\}$ et E et vérifiant les relations :

$$h \circ u - u \circ h = 2u, \quad h \circ v - v \circ h = -2v \quad \text{et} \quad u \circ v - v \circ u = h.$$

- a) Montrer que $h(x) = \lambda x$ entraîne $h(u(x)) = (\lambda + 2)u(x)$:
En déduire qu'il existe un vecteur non nul x_0 et un scalaire λ_0 tels que l'on ait $h(x_0) = \lambda_0 x_0$ et $u(x_0) = 0$.
- b) On construit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à partir de x_0 en posant $x_k = \frac{1}{k!} v^k(x_0)$ pour tout k .
Montrer que l'on a :

$$h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k$$

$$v(x_k) = (k+1)x_{k+1}$$

$$u(x_k) = (\lambda_0 - k + 1)x_{k-1}$$

pour tout k (par convention $x_{-1} = 0$).

- c) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que la famille $X = (x_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, r-1\}}$ soit une base de E et calculer r et λ en fonction de n .
Donner alors les matrices de u, v et h dans X .

Exercice 2 : a) Soit A une matrice carrée d'ordre 3 complexe, de polynôme caractéristique

$\chi_A(z) = (z - \lambda)^3$, telle que le noyau de $A - \text{Id}$ soit de dimension 1. Rappeler brièvement pourquoi il existe trois vecteurs non nuls v_1, v_2, v_3 tels que $Av_1 = \lambda v_1, Av_2 = v_1 + \lambda v_2$ et $Av_3 = v_2 + \lambda v_3$.

Considérons le système différentiel : $\frac{dX}{dt} = AX$ (1)

En utilisant la matrice de passage P , écrire un système différentiel équivalent à (1), qu'on notera $\frac{dY}{dt} = TY$ (2)

b) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le système différentiel :

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \frac{1}{t} (x - 3y + 3z, -2x - 6y + 13z, -x - 4y + 8z).$$

En utilisant les solutions de (2), exprimer les solutions de (1) en fonction des trois vecteurs v_1, v_2 et v_3

et d'un vecteur constant $Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.